

Após finalizarmos este material, a lista

“HIDRODINÂMICA”

pode ser feita por completo.

HIDRODINÂMICA – INTRODUÇÃO

A HIDRODINÂMICA é o estudo de líquidos em movimento, embora o prefixo “HIDRO” possa se referir à água apenas. Mais que isso, vamos estudar também o movimento de qualquer fluido não compressível e não viscoso, portanto podemos incluir líquidos em geral e, em algumas circunstâncias, gases também (apesar deste ser compressível. Chamaremos este fluido de fluido **ideal**.

Vamos começar com o estudo com o estudo da vazão z de um líquido:

- seja um tubo de seção transversal A , como na figura (1);
- seja v a velocidade de um fluido que passa por dentro deste tubo;
- imaginemos dois cortes e calculemos o volume v entre estes dois cortes, conforme figura (2);
- vamos, por fim, calcular o tempo (Δt) que leva para todo este volume leva para atravessar o corte do lado direito.

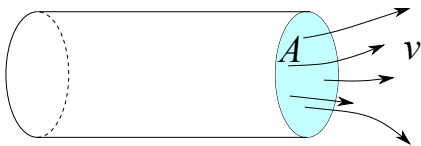


Figura 1: Fluido saindo por uma tubulação de seção transversal A .

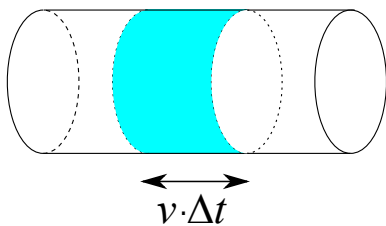
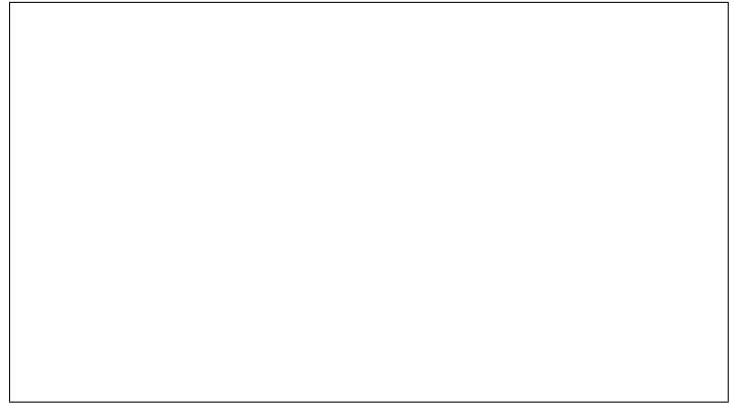


Figura 2: Tubo, por onde passa um fluido ideal, onde representam-se dois cortes, que usaremos para determinar como calcular a vazão.

Calculemos a vazão, no Q01:



Assim, temos a equação da vazão:

$$z = v \cdot A. \quad (1)$$

Vamos praticar um pouco:

EXERCÍCIO

01. Em um jardim, uma mangueira horizontal situada a 1,25 m acima do solo plano e horizontal, lança água que atinge um ponto a 1 m da base de onde a água sai, isto é, possui um alcance horizontal de 1 m. Você sabe que a mangueira utilizada é de 1/2 de polegada (medida interna do diâmetro). Faça o que se pede:

- Faça um esquema do que é descrito no texto e calcule a velocidade com que a água sai da mangueira. Adote $g = 10m/s^2$.
- Sabendo que uma polegada corresponde a 2,54 cm, calcule a área de seção transversal, em m^2 , da mangueira (adote $\pi \approx 3,14$).
- Calcule, por fim, a vazão da mangueira, em unidades do Sistema Internacional. Converta sua resposta em litros por segundo e em mL por minuto.

Vamos agora estudar a **equação da continuidade**, que nada mais é do que a consequência da aplicação de uma hipótese bastante razoável:

O volume de um fluido ideal é conservado.

Imagine agora que temos um tubo com duas secções transversais diferentes, como na figura (3). Não havendo uma fonte de fluido ou algum sorvedouro, podemos admitir sem problemas que todo o líquido que atravessa a área A_1 atravessará a secção de área A_2 . Podemos pensar que se passar um volume V num tempo Δt na secção da esquerda, também passará este mesmo volume neste mesmo tempo na secção da direita, isto é, é bem razoável supor que a vazão é a mesma tanto do lado esquerdo como do lado direito.

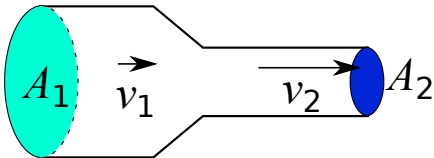


Figura 3: Tubo com secções transversais diferentes: à esquerda de área A_1 e à direita de área A_2 .

Q. 02 – EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Escrevendo então a equação da continuidade, temos:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2. \quad (2)$$

Note que a vazão é uma grandeza escalar, assim se por algum motivo tivermos que somá-las, basta fazê-lo como fazemos com quaisquer outros escalares, como pressão, massa, tempo, etc.

Como exemplo, imagine os rios Negro e Solimões se juntando para formar o rio Amazonas. Chamando de z_N a vazão do rio Negro, de z_S a do rio Solimões e de Z_A a do rio Amazonas, podemos escrever:

Q. 03 – RIOS NEGRO E SOLIMÕES SE ENCONTRANDO PARA FORMAR O RIO AMAZONAS

Podemos assim escrever que a soma das vazões que chegam em um “ponto” de confluência é igual à soma das vazões que saem desse “ponto”. Assim, imagine que m rios se encontram dando origem a n rios, em linguagem matemática podemos escrever que:

$$z_1^{entra} + z_2^{entra} + \dots + z_m^{entra} = z_1^{sai} + z_2^{sai} + \dots + z_n^{sai}.$$

Em uma notação um pouco mais compacta, temos:

$$\sum_{i=1}^m z_i^{entra} = \sum_{j=1}^n z_j^{sai}. \quad (3)$$

Vamos voltar a falar de fluido em movimento: *escoamento ideal*. Dizemos que um escoamento ideal possui as seguintes características:

- não há viscosidade, ou seja, nenhum tipo de atrito existe (a viscosidade é o que dá um tipo de liga ao fluido);
- o escoamento é incompressível, ou seja, por mais que se queira, comprimir a água, por exemplo, é muito difícil, assim consideramos que não é possível comprimir o fluido em estudo;
- escoamento irrotacional: isso significa que o fluido que vamos estudar não irá girar de forma alguma;

- escoamento estacionário significa que a direção do fluxo do líquido não muda com o tempo.

Vamos praticar mais um pouco:

EXERCÍCIO

02. Imagine três rios de seções transversais retangulares. Chamemos os rios de rios 1, 2 e 3 tal que os rios 1 e 2 se juntam para formar o rio três. Jogando uma bola de isopor nos rios e acompanhando-a você pôde obter a velocidade da água em cada um dos rios obtendo os seguintes valores: $v_1 = 2$ m/s, $v_2 = 3$ m/s e $v_3 = 3,4$ m/s. Você também conseguiu medir a largura de cada um dos três rios usando triangulação (semelhança de triângulos) obtendo os seguintes valores: $l_1 = 5$ m, $l_2 = 3$ m e $l_3 = 4$ m. Usando, por fim, uma vara de bambu você mediu a profundidade do rio 1 ($h_1 = 3$ m) e do rio 2 ($h_2 = 2$ m), mas não conseguiu medir a profundidade do rio 3, pois o bambu era muito curto.

Com base no que você aprendeu hoje, determine a profundidade do rio 3.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Seja uma tubulação cuja seção transversal varie e, além disso, a altura do lado esquerdo é diferente da altura do lado direito como apresentado na figura (4).

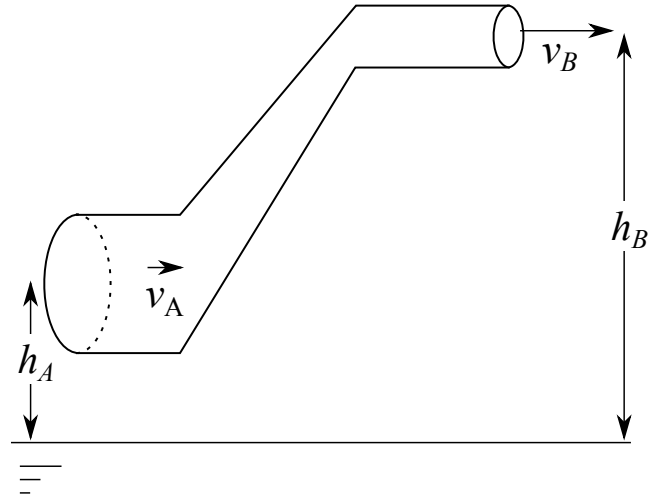


Figura 4: Tubo com seções transversais diferentes e diferentes alturas do lado esquerdo e direito. A equação de continuidade (equação 2) e a equação de Bernoulli (equação 4) devem ser levadas em conta.

Vamos à equação de Bernoulli (e depois veremos sua aplicação).

A equação de Bernoulli é:

$$p_A + d \cdot g \cdot h_A + \frac{d \cdot v_A^2}{2} = p_B + d \cdot g \cdot h_B + \frac{d \cdot v_B^2}{2}. \quad (4)$$

Sendo que as variáveis apresentadas descritas a seguir.

- Os sub-índices A e B representam as grandezas relativas aos lados esquerdo e direito, respectivamente.
- h representa a altura da tubulação. A espessura (diâmetro) da tubulação será desconsiderada, isto é, o diâmetro da tubulação é muito menor que a altura a ser levada em conta.
- d é a densidade do fluido. Embora estudaremos com mais afinco fluidos incompressíveis, a equação de Bernoulli leva em conta possíveis variações da densidade do fluido.
- g é a aceleração da gravidade local.
- v é a velocidade do fluido.
- p é a pressão à qual o fluido está submetido.

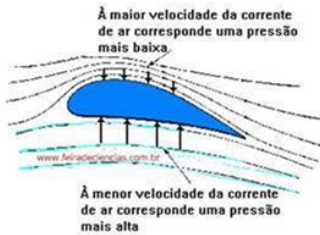
Como aplicação, tentaremos explicar alguns fenômenos. Basicamente o que vamos fazer até o fim do ano é ver as aplicações das equações da continuidade (equação 2) e da equação de Bernoulli (equação 4). Vamos começar:

(A) PORQUE UM AVIÃO VOA?

Começemos com a seguinte explicação (figura 5). A explicação tradicional é que o ar que escoar na parte superior da asa é maior que na parte inferior, isso causa uma diferença de pressão segundo a equação de Bernoulli e, portanto, surge uma força de sustentação.

A asa do avião

Consideremos uma corrente de ar em torno da asa de um avião em vôo.



As asas têm uma forma tal, que a distância total percorrida pelo ar em sua face superior é maior que na inferior. Assim, a velocidade do fluxo de ar **sobre** a asa tem de ser maior do que **sob** ela, o que origina na parte superior uma pressão mais baixa.

Figura 5: Esquema explicando as diferentes pressões que surgem na asa de um avião. Figura extraída da internet e disponível em: <http://www.eporque.com.br/wp-content/uploads/2016/11/por-que-o-aviao-voa-asa.jpg>.

Vamos fazer algumas considerações:

- menor velocidade implica em maior pressão (consequência da equação de Bernoulli (equação 4) considerando que a parte superior e inferior das asas estão à uma mesma altura;
- o ar que passa por cima da asa é mais rápido, portanto a pressão é menor;
- a densidade do ar sobre as asas e abaixo delas possuem aproximadamente a mesma densidade, apesar das pressões serem diferentes.

Aqui é importante observarmos que a explicação mais aceitável é outra: chama-se efeito Coanda. Veremos um vídeo sobre isso agora, porém logo após, utilizando a hipótese anterior, vamos calcular a força de sustentação devido unicamente à diferença de pressão.

Agora que vimos o vídeo, vamos calcular a diferença de pressão entre as partes superiores e inferiores da asa do avião em função da densidade d do ar e das velocidades do ar, em relação às asas do avião, na parte superior v_{sup} e na parte inferior v_{inf} .

Q. 04 – CALCULANDO A DIFERENÇA DE PRESSÃO ENTRE AS FACES SUPERIOR E INFERIOR DA ASA DO AVIÃO

Como resumo, podemos escrever o resultado obtido na equação 5:

$$\Delta p = \frac{d}{2} \cdot (v_{sup}^2 - v_{inf}^2) \quad (5)$$

A diferença de pressão obtida nos permite determinar a força de sustentação que o ar faz. Para isso, consideremos que a parte superior das asas do avião e a parte inferior possuem as mesmas áreas. Sendo A_{asas} a área total de ambas as asas do avião, podemos concluir que a força de sustentação F_{sut} , em função das velocidades do ar na parte superior e inferior das asas, é dada por:

Q. 05 – FORÇA DE SUSTENTAÇÃO DEVIDO À DIFERENÇA DE PRESSÃO

Vamos chamar o peso do avião de W (do inglês *weight*) para evitarmos possíveis confusão com as pressões envolvidas. Assim, sabendo o peso do avião, podemos determinar uma relação entre as velocidades da parte superior e inferior do ar, em relação às asas do avião, para que o avião voe com velocidade constante. Tal raciocínio está no Q. 06, as forças envolvidas estão representadas na figura (6) e o resultado repetido na equação 6.

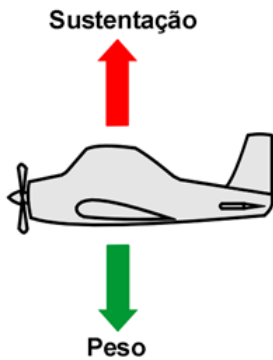
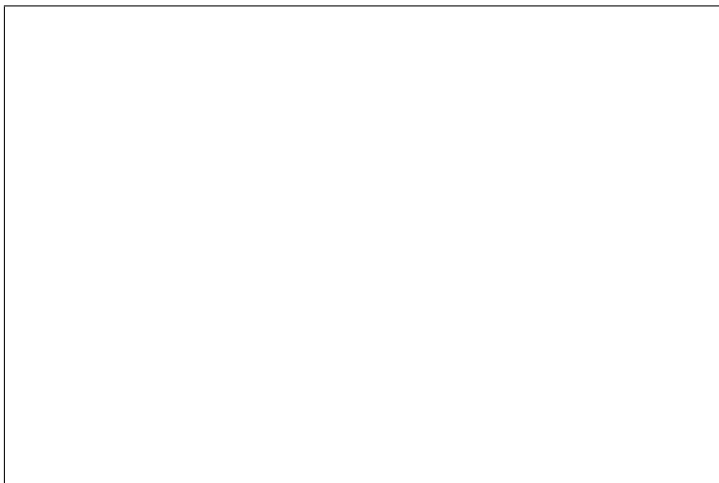


Figura 6: Esquema de um avião e duas forças verticais atuando nele: a força de sustentação F_{sut} e seu peso W . O módulo destas duas forças são iguais quando o avião voa com velocidade constante, isto é, sua velocidade possui módulo constante e não muda de direção. Figura extraída da internet e disponível em: http://www.vooleve.com/Pages/Artigos_files/Angulo_ataque/angulo_ataque_files/4Forcas.PNG.

Q. 06 – RELAÇÃO ENTRE PESO DO AVIÃO



$$W = \frac{\rho}{2} \cdot (v_{sup}^2 - v_{inf}^2) \cdot A_{asas} \quad (6)$$

Como não poderíamos deixar de mencionar, a resultante das forças que agem no avião em situação na qual a sua velocidade vetorial é constante é nula. Assim, há uma força de resistência empurrando o avião para trás que chamamos de força de arrastor, por isso o avião deve manter seus motores funcionando, pois a força que o avião faz para frente deve anular o efeito da força de arrasto. Veja este esquema na figura (7).



Figura 7: Esquema de um avião e quatro forças atuando: a força de sustentação, seu peso, a força de arrasto e a força que o avião faz. O módulo das duas forças verticais também são iguais quando o avião voa com velocidade constante, isto é, sua velocidade possui módulo constante e não muda de direção. Figura extraída da internet e disponível em: http://www.vooleve.com/Pages/Artigos_files/Angulo_ataque/angulo_ataque_files/4Forcas.PNG.

(B) TOCAS DE ALGUNS ANIMAIS

Alguns animais abrem suas tocas conforme a figura a seguir (figura 8).

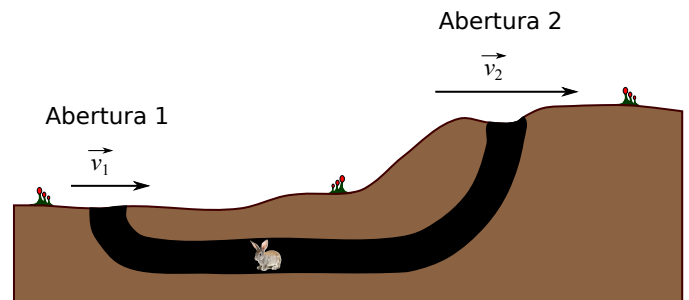


Figura 8: Toca de um animal com uma das aberturas mais elevada que a outra.

Provavelmente estes animais não sabem, no entanto, a velocidade do vento varia com a altura, sendo tanto maior quanto mais alto está. A figura 9 apresenta um perfil/diagrama de velocidades como função da altitude.

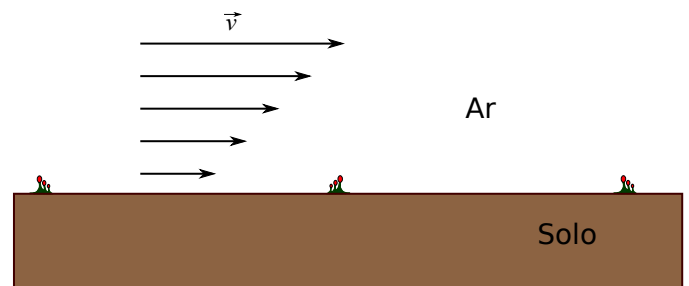


Figura 9: Perfil de velocidade do vento paralelo ao plano horizontal.

Observe que:

- quanto mais alto mais rápidos são os ventos;
- segundo a equação de Bernoulli, quanto maior a velocidade menor a pressão;
- consideremos a diferença de altura desprezíveis na equação de Bernoulli.

Podemos determinar a diferença de pressão entre o lado mais baixo e mais alto da toca em função da densidade d do ar, da velocidade do vento rasante ao solo com velocidade v_1 do lado mais baixo e da velocidade v_2 do lado mais alto.

Você vê algum problema com a hipótese abordada acima? Temos pelo menos uma absurda: consideramos a densidade do ar constante, portanto, consideramos o ar incompressível. Você pode encontrar outra falha?

Q. 07 – DIFERENÇA DE PRESSÃO ENTRE OS LADOS MAIS BAIXO E MAIS ALTO DE DUAS ENTRADAS DA TOCA DE UM ANIMAL COM ENTRADAS EM ALTURAS DIFERENTES



Obtemos então esta equação:

$$p_1 - p_2 = \frac{d}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2). \quad (7)$$

Essa diferença de pressão provoca um fluxo dentro da toca, possibilitando que a toca fique melhor refrigerada. O ar dentro da toca entra no lado mais baixo e sai, portanto, no lado mais elevado.

A equação (7) é idêntica à equação (5), e este resultado se repetirá algumas vezes.

(C) BOLINHA DE PING-PONG EM UM SECADOR DE CABELOS

Um experimento muito comum de ser realizado em sala de aula e usar um secador de cabelos para manter uma bolinha de ping-pong em repouso no ar. A princípio, a explicação parece ser simples, pois o ar “empurraria” a bolinha para cima, mas esta explicação simples não é suficiente para explicar o motivo da bolinha não cair quando inclinamos um pouco o secador de cabelo, como representado na figura 10.



Figura 10: Bolinha de ping-pong mantida “flutuando” no ar devido ao ar soprado por um secador de cabelo.

Observe que se a bolinha se deslocar para o lado, a velocidade na parte central do fluxo terá velocidade maior (isso é representado pela distância entre as linhas de velocidade: quanto menor a distância entre as linhas, maior a velocidade), então haverá uma força na direção de A. Isso faz com que a bolinha se estabiliza entorno do centro do fluxo.

(D) EFEITO MAGNUS

Uma esfera com velocidade v e velocidade angular ω sofre a ação de uma força F_{magnus} conforme figura 11.

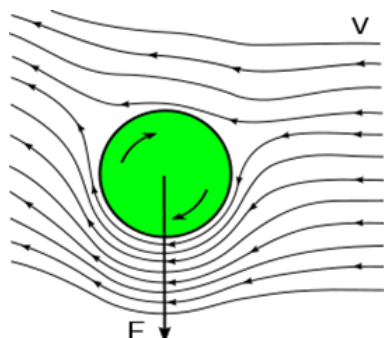


Figura 11: Efeito Magnus: força que surge devido ao movimento de rotação e translação de uma esfera.

Você pode ver um vídeo sobre este efeito utilizando o QR code na figura 12.



Figura 12: Efeito Magnus: vídeo mostrando o efeito sobre uma bola de basquete abandonada do alto de uma barragem. Busque no youtube por *magnus effect basketball*, caso julgue mais fácil.

(E) DESTELHAMENTO

A equação de Bernoulli explica porque um vendaval pode destelhar uma casa (figura 13), uma vez que a pressão acima do telhado a velocidade do ar será maior que na parte interna, que está em repouso. Isso implica que a pressão dentro da casa é maior, o que produz uma diferença de pressão entre a parte interna e externa da residência que, por sua vez, produz uma força empurrando o telhado para cima.

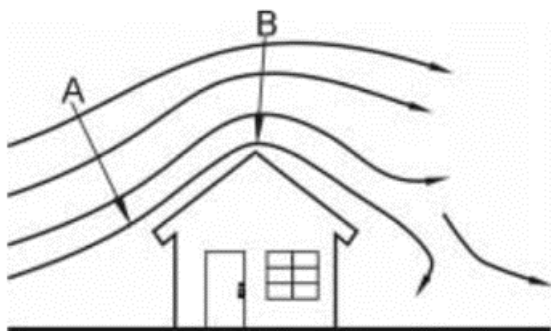


Figura 13: Perfil de velocidades do ar ao redor de uma casa.

(F) PARE QUE SERVEM OS AEROFÓLIOS DOS CARROS?

Observe o esquema a seguir (figura 14) onde é representado o perfil de fluxo de ar entorno de um carro com velocidade constante.

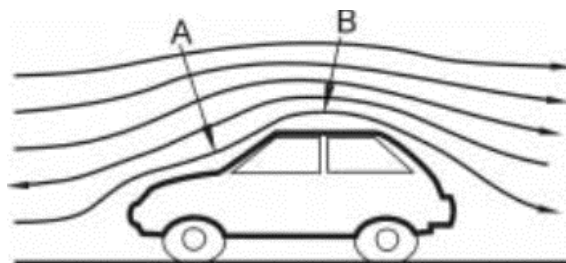


Figura 14: Perfil de velocidades do ar ao redor de um veículo.

Surge uma força vertical para cima sobre os carros devido ao perfil de velocidades que surge. Isso traz instabilidade aos veículos, por isso vemos que alguns veículos possuem aerofólios em sua traseira: os aerofólios servem para impulsionar o veículo para baixo dando mais estabilidade ao veículo.

A figura 15 apresenta uma imagem de um aerofólio que é usado para melhorar a sustentação de um veículo contra o solo, melhorando assim sua estabilidade.



Figura 15: Fotografia de um aerofólio.

(G) MAIS DETALHES SOBRE A FLUIDODINÂMICA REAL

As figuras dos itens (C) e (E) foram retiradas de um artigo que pode ser baixado a partir do QR code da figura 16. É interessante notar que há algumas imprecisões no ensino de fluidodinâmica, isso quando é ensinada, e no artigo a citado há uma boa discussão sobre o assunto.



Figura 16: Artigo da RBF (Revista Brasileira de Física). Artigo disponível no link <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v23n4/v23n4a09.pdf>.

(H) FLUIDODINÂMICA REAL

Se considerarmos as turbulências em fluídos a fluidodinâmica complica-se muito, porém fica mais realista. Considerando a turbulência, o formato mais aerodinâmico é próximo à uma gota de chuva, por esta razão uma bola de futebol americano é mais aerodinâmica que uma esfera. A figura 17 representa um perfil mais turbulento para uma bola de futebol tradicional no Brasil e um perfil menos turbulento de uma bola de futebol americano.

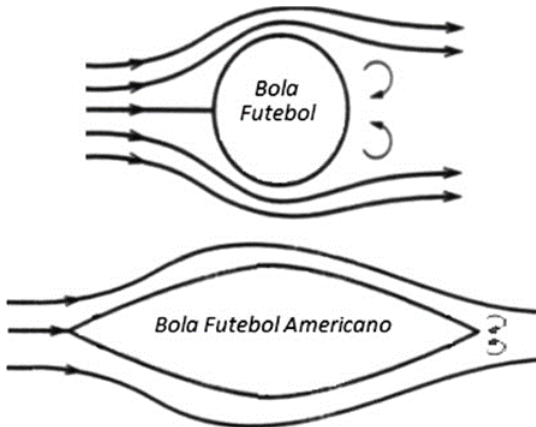


Figura 17: Aerodinâmica de uma bola do futebol tradicional brasileiro e bola do futebol americano.

EQUAÇÃO DE TORRICELLI

Voltando para uma parte mais quantitativa e melnos ilustrativa, vamos aplicar os conceitos anteriores para chegar à uma equação tão similar à equação de Torricelli da cinemática que podem parecer serem a mesma coisa. Para isso, considere a figura 18 no qual está representado um reservatório com água até certo nível h . Em sua base é feito um pequeno furo, com área muito menor que a área do reservatório, assim podemos determinar, em função da profundidade, da gravidade e das velocidades dos pontos A (v_A) e B (v_B).

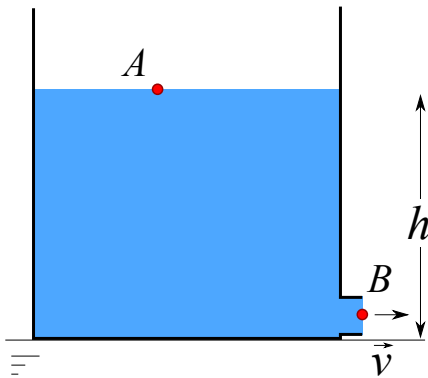
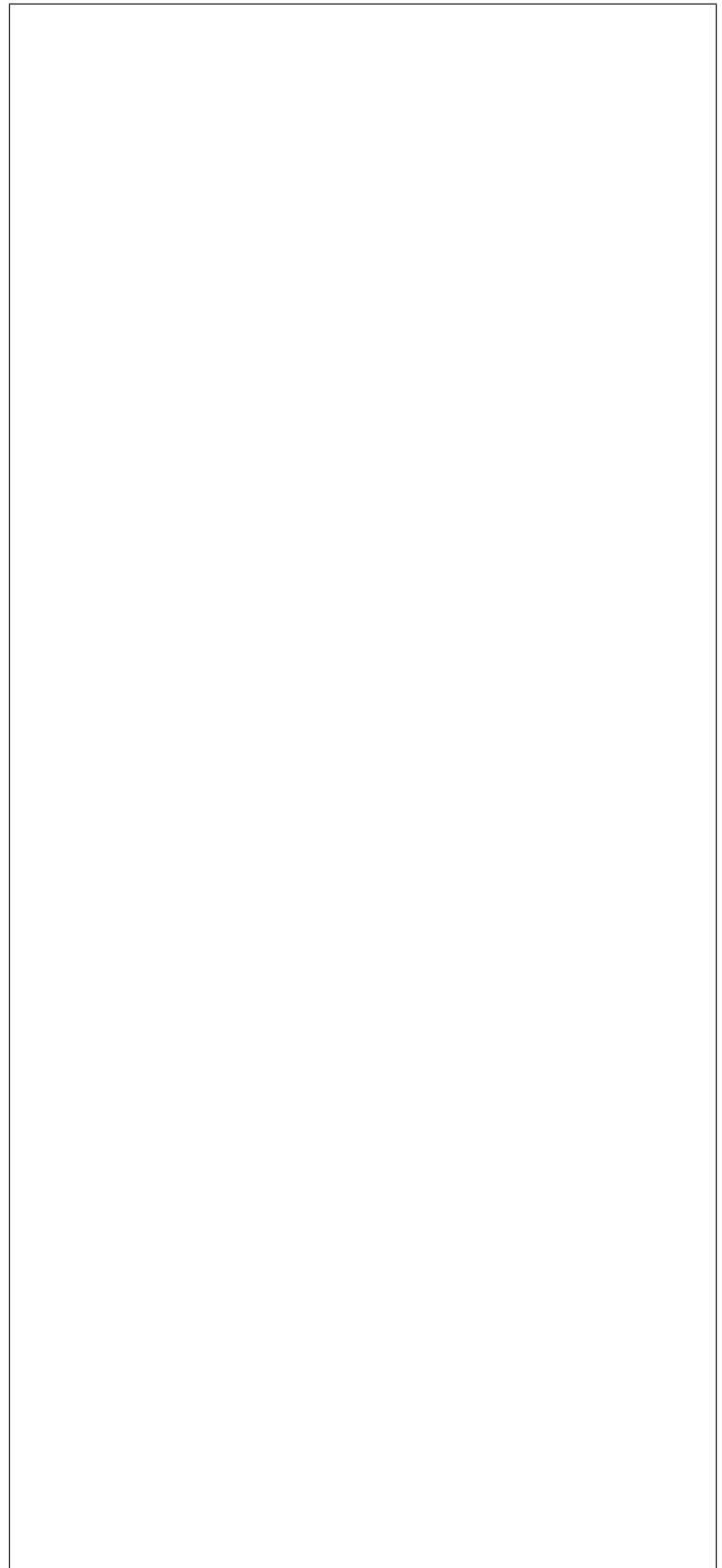


Figura 18: Um reservatório com um furo na base.

Determine a velocidade com que a água sai pelo orifício em função da profundidade h e da gravidade g . Considere $v_A \ll v_B$ para isso.

Q. 07 – VELOCIDADE v EM FUNÇÃO DA PROFUNDIDADE PARA A ÁGUA SAÍNDO DE UM RESERVATÓRIO



Ou seja, obtemos a equação de Torricelli, conforme equação (8):

$$v \approx \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{8}$$

TUBO DE VENTURI

Segundo a *wikipedia*:

O tubo de Venturi é um aparato criado por Giovanni Battista Venturi para medir a velocidade do escoamento e a vazão de um líquido incompressível através da variação da pressão durante a passagem deste líquido por um tubo de seção mais larga e depois por outro de seção mais estreita.

A figura 19 mostra o esquema de um tubo de venturi. Considere os dois pontos na linha horizontal, sob uma mesma altura. Considerando a equação de Bernoulli, o princípio de Stevin e a equação de continuidade, podemos demonstrar a equação

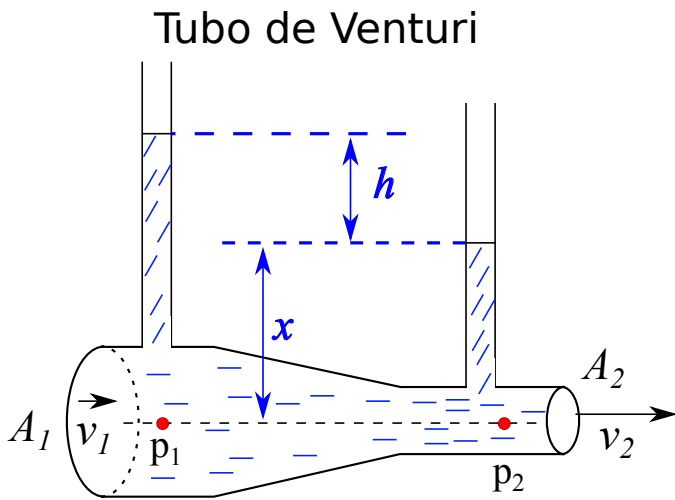


Figura 19: Tubo de venturi.

Q. 08 – USANDO A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E CONSIDERANDO $h_1 = h_2$

Q. 09 – USANDO O PRINCÍPIO DE STEVIN NO RESULTADO ANTERIOR

Q. 10 – POR FIM, USANDO A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

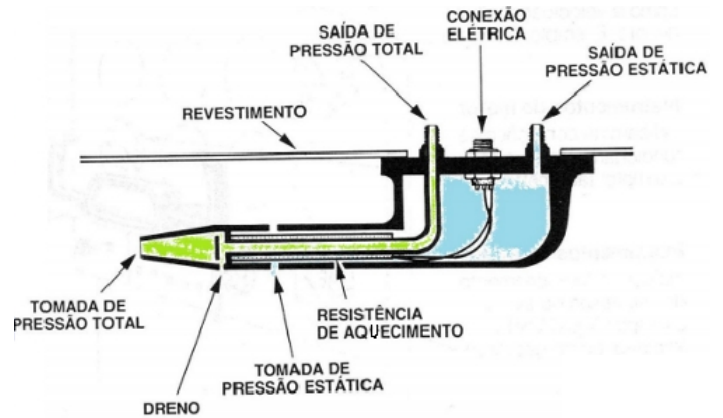


Figura 20: Tubo de Pitot em um avião.

Tubo de Pitot

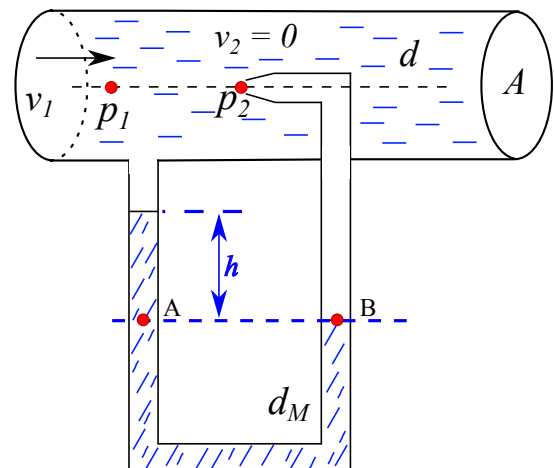


Figura 21: Esquema de um tubo de Pitot. Aqui está representado um fluido de densidade d , geralmente ar, passando pelo tubo de seção transversal A , um fluido manométrico de densidade d_M , o desnível entre os dois lados do fluido manométrico, a velocidade do fluido na entrada do tubo de pitot v_1 e a velocidade no estrangulamento v_2 .

Sabemos que a densidade do mercúrio é de aproximadamente 13.595 kg/m^3 enquanto que a densidade do ar é de cerca de $1,2 \text{ kg/m}^3$, assim podemos supor como hipótese razoável que

Q. 11 – CALCULANDO A VAZÃO

resultado será o apresentado na equação (9):

$$z = A_1 \cdot A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}} \quad (9)$$

TUBO DE PITOT

Tubo de Pitot é um instrumento de medida usado principalmente em aviões para medir a velocidade do avião em relação ao ar. A figura 20 apresenta uma fotografia de um tubo de Pitot de um avião e a figura 21 apresenta um esquema simplificado do tubo de Pitot.

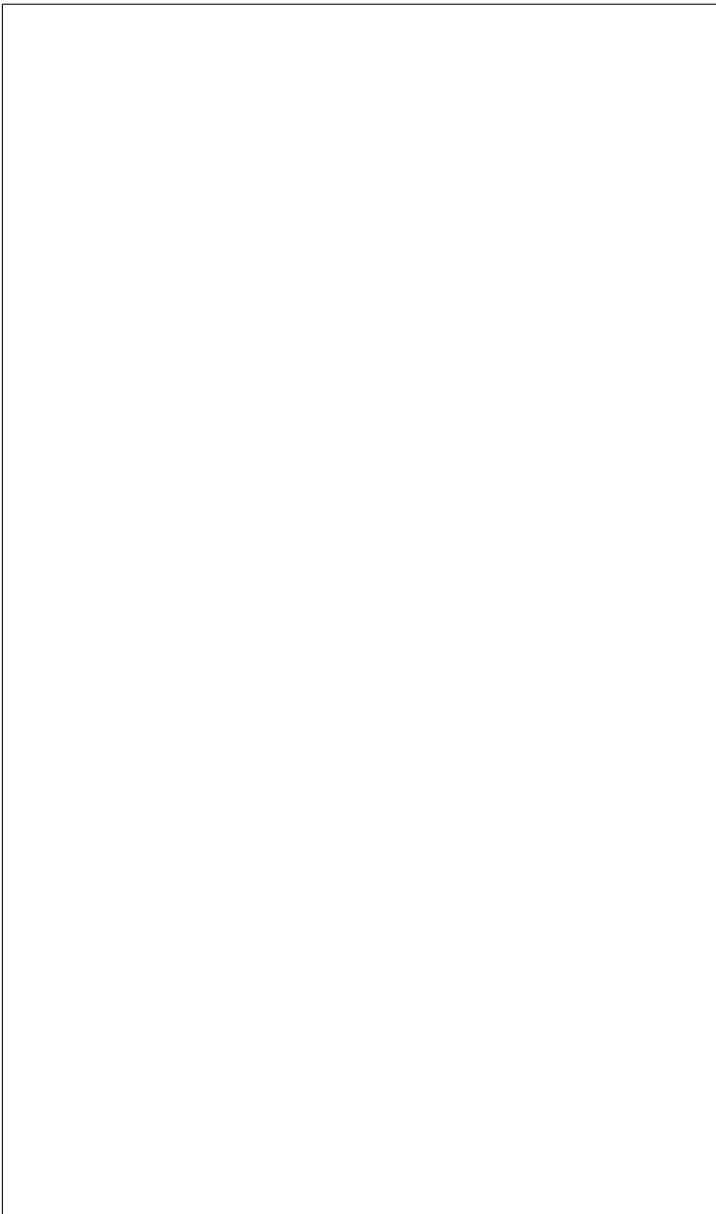
Atualmente os tubos de Pitot utilizados em aviões são bem mais modernos que o representado na figura 21, porém ele nos dará uma ideia de como medir a velocidade de um fluido utilizando conceitos de fluidodinâmica.

Para começar, observe os nomes dos termos que vamos utilizar descritos na figura 21. O chamado líquido manométrico deve ser um líquido de alta densidade e não volátil, sendo o mais comum o mercúrio.

$d_M \gg d$.

Observe que v_1 é a velocidade do ar em relação ao tubo que é a mesma, em módulo, velocidade do tubo (ou do avião) em relação ao ar. Podemos também admitir que $v_2 = 0$, pois o estreitamento e a impossibilidade do fluxo continuar pelo tubo menor faz o ar ficar localmente parado. Por fim, podemos considerar que $h_1 = h_2$ na equação de Bernoulli. Usando Stevin e Bernoulli, determinamos a velocidade do avião em relação ao ar.

Q. 12 – VELOCIDADE DO AVIÃO EM FUNÇÃO DA GRAVIDADE g , DA DENSIDADE DO FLUÍDO MANOMÉTRICO d_M , DO AR d E DO DESNÍVEL h



Obtemos então a equação de Pitot:

$$v_1 = \sqrt{\frac{d_M}{d} \cdot 2gh} \quad (10)$$

Esta seria a velocidade de, por exemplo, um avião em função de informações como densidade do ar, densidade do mercúrio, aceleração da gravidade e desnível h do líquido manométrico, ou seja, “medimos a velocidade de um avião usando uma régua”.

EXERCÍCIOS

03. (Pucsp 2018 – MODIFICADO) Por uma luva de redução de PVC, que fará parte de uma tubulação, passarão 180 litros de água por minuto. Os diâmetros internos dessa luva são 60 mm para a entrada e 10 mm para a saída da água.



Determine, em m/s a velocidade aproximada de entrada da água nessa luva.

Se necessário, considere $\pi = 3$. a) 0,8

b) 1,1

c) 1,8

d) 4,1

04. Ainda sobre a questão anterior, determine a velocidade de saída da água na luva.

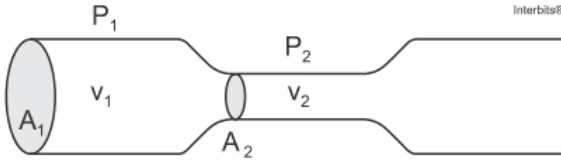
a) 0,18

b) 0,7

c) 18

d) 40

05. (Ufrgs 2017) A figura abaixo mostra um fluido incompressível que escoar com velocidade v_1 através de um tubo horizontal de seção reta A_1 e atravessa, com velocidade v_2 , um trecho estrangulado de seção reta $A_2 = A_1/4$.

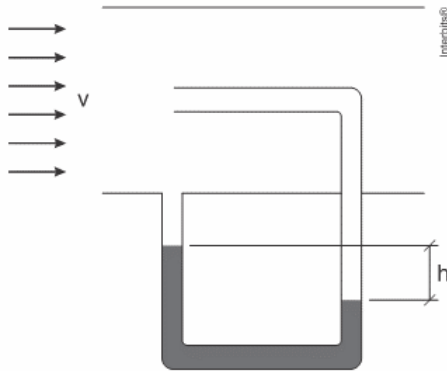


Nessa situação, a razão entre os módulos das velocidades é

v_2/v_1 é

- a) 4
- b) 2
- c) 1
- d) 1/2
- e) 1/4

06. (Ime 2018)



A figura acima mostra esquematicamente um tipo de experimento realizado em um túnel de vento com um tubo de Pitot, utilizado para medir a velocidade v do ar que escoar no túnel de vento. Para isso, a diferença de nível h entre as colunas do líquido é registrada. Em um dia frio, o experimento foi realizado e foi obtido o valor de 10 cm para a diferença de nível h . Em um dia quente, o experimento foi repetido e foi obtido o valor de 10,05 cm para a diferença de nível h .

Dados:

- a massa específica do líquido é 1.000 vezes maior que a massa específica do ar no dia frio; e
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Considerações:

- a velocidade do ar no túnel de vento foi a mesma nos dois experimentos;
- a massa específica do ar foi a mesma nos dois experimentos;
- a aceleração da gravidade foi a mesma nos dois experimentos;
- e
- despreze a dilatação térmica da estrutura do tubo de Pitot.

Determine:

- a) o valor do coeficiente de dilatação volumétrica do líquido no interior do tubo, sabendo que a variação de temperatura entre o dia quente e o dia frio foi de 25 K;
- b) a velocidade do ar v .